Approximation de solutions entropiques d'équations d'évolution semi-linéaires

Yann Brenier

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 60

APPROXIMATION DE SOLUTIONS ENTROPIQUES D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION SEMI-LINÉAIRES

Yann BRENIER

Mars 1981

APPROXIMATION DE SOLUTIONS ENTROPIQUES D'EQUATIONS D'EVOLUTION SEMI-LINEAIRES

Yann BRENIER

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt
78150-Le Chesnay
FRANCE

****
RESUME
****

Nous étudions le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$ pour les équations hyperboliques non-linéaires du type : $\partial_t u + \mathrm{div}(B(u))=0$, et plus généralement pour les équations d'évolution semilinéaires.

Nous en approchons les solutions entropiques -au sens de Kružkov, par exemple- au moyen d'une semi-discrétisation en temps :

on résout d'abord à chaque pas de temps une collection de problèmes de Cauchy linéaires d'équation : $\partial_t s + B'(w).\mathrm{grad}s = 0$,

le paramètre w décrivant $\mathbb{R}$; on intègre ensuite leurs solutions par rapport à w.

****
ABSTRACT
****

We introduce a step-forward operator $T(\delta t)$ to approximate the nonlinear contractive evolution operator $S(t)$ corresponding to the scalar conservation law :

$\partial_t u + \mathrm{div}(B(u)) = 0$ (or more general semilinear evolution equations).

We obtain $T(\delta t)u$ by integrating in $w \in \mathbb{R}$ the solutions at time δt of the initial value problem corresponding to the LINEAR operator :

$\partial_t + B'(w).\mathrm{grad}$ and the initial data : $x \mapsto \chi\{0<w<u(x)\} - \chi\{0>w>u(x)\}$.

Then we prove the product formula : $S(t)=\lim_{n\to\infty} T(t/n)^n$.

****
INTRODUCTION
****

Dans les années 60, Oleïnik, Volpert et Kružkov ([10],[11],[8]) ont introduit pour les équations du type : $\partial_t u + \mathrm{div}(B(u))=0$, la notion de solution entropique grâce à laquelle ils ont pu obtenir des résultats d'existence globale et d'unicité.
Rappelons, en comparaison, qu'il n'y a en général pas d'existence globale de solutions classiques, ni d'unicité pour les solutions faibles (au sens des distributions) ,quelle que soit la régularité des données.

Pour approcher les solutions entropiques, on utilise généralement des schémas de différences ou d'éléments finis (voir [4],[8],[2]), ou encore l'algorithme stochastique de Glimm ([7],[3]).

Nous proposons ici une méthode d'approximation de nature sensiblement différente. Il s'agit d'une semi-discrétisation en temps, dont le principe est le suivant :

Pour résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}(B(u))=0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$

on cherche à construire un opérateur d'évolution discret $T(\delta t)$ tel que la solution entropique $u(t,x)$ puisse s'écrire sous la forme :

$$u(t,.) = \lim_{n\to\infty} T(t/n)^n.u_0 .$$

Dans ce but, on considère la famille d'équations LINEAIRES :

$\partial_t s + B'(w).\mathrm{grad}s = 0$, où le paramètre w décrit $\mathbb{R}$,
et la famille de semi-groupes associée $((S_w(t),t\in\mathbb{R}_+)\ ;\ w\in\mathbb{R})$.

Cela nous permet de définir un opérateur d'évolution discret $G(\delta t)$, agissant sur les fonctions $f(x,w)$ définies sur l'espace-produit $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ suivant la formule : $G(\delta t)f(.,.)(x,w) = [S_w(\delta t)f(.,w)](x)$.

La construction de $T(\delta t)$ est alors très simple : on associe à toute fonction $u(x)$ sur $\mathbb{R}^N$, la fonction $ju(x,w)$ définie sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ par :
$ju(x,w) = \chi\{0<w<u(x)\} - \chi\{0>w>u(x)\}$;
on applique à ju l'opérateur $G(\delta t)$, ce qui nous donne une fonction $f(x,w)$ définie sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$, qu'on intègre ensuite sur $\mathbb{R}$ par rapport à w, et on obtient ainsi la transformée $T(\delta t)u(x)$.

Ce procédé est strictement équivalent à la méthode de transport-écroulement que nous avons récemment introduite dans [0] et dont on trouvera les développements numériques dans [1].

Dans les pages qui suivent, nous étudierons d'abord -dans un cadre assez général- la construction d'un opérateur non-linéaire dans L^1 à partir d'une famille à un paramètre réel d'opérateurs linéaires (paragraphes 1 et 2) ; nous appliquerons ensuite cette construction au cas des équations aux dérivées partielles semi-linéaires, en dégageant les conditions qui assurent la convergence du procédé (paragraphe 3) et sa continuité par rapport aux données (paragraphe 4) ; enfin nous considérerons le cas particulier des équations hyperboliques du premier ordre et nous énoncerons un résultat de convergence, en nous appuyant sur le théorème d'unicité de Kružkov (paragraphe 5). L'extension de la méthode est ensuite envisagée pour les équations paraboliques semi-linéaires dégénérées (paragraphe 6).

0. Notations.

(X,dx) est un espace mesurable ; on munit l'espace $X*\mathbb{R}$ de la mesure produit $dx*dw$, où dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas particulier où (X,dx) est $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue, on définira la variation totale $TV(u)$ d'une fonction de L^1 par :

$TV(u) = \sup \int u(x).\mathrm{div}Y(x)dx$ où Y décrit l'ensemble des champs de vecteurs réguliers à support compact sur $\mathbb{R}^N$ qui vérifient :

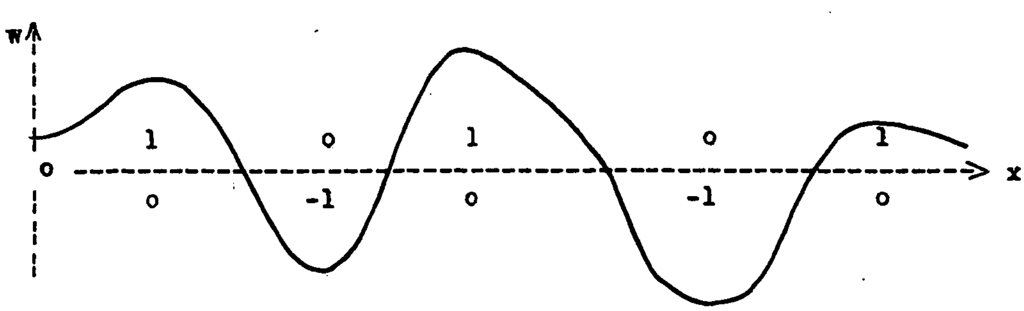
$|Y(x)| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}^N$ ($|.|$ désignant une norme fixée sur $\mathbb{R}^N$).

1. Relations entre fonctions sur X et fonctions sur X*IR.

1.1. Définition 1

A toute fonction u sur X, on associe la fonction $j(u)$ sur $X*\mathbb{R}$:

(1) $$j(u)(x,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(x) > w > 0 \\ -1 & \text{si } u(x) < w < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



On a immédiatement les propriétés suivantes :

(2) $m \leqslant u(x) \leqslant M$ p.p., si et seulement si :

$0 \leqslant \operatorname{sgn}(w)\ j(u)(x,w) \leqslant \chi\{m \leqslant w \leqslant M\}$ p.p.

en particulier : $j(0) = 0$;

(3) $u \in L^1(X)$ si et seulement si $j(u) \in L^1(X \times \mathbb{R})$ et :

$$\iint |j(u)(x,w)|dwdx = \int |u(x)|dx \ ; \quad \iint j(u)(x,w)dwdx = \int u(x)dx \ .$$

(4) $\forall u,v \in L^1(X)$: $\|ju - jv\|_{L^1(X \times \mathbb{R})} = |u - v|_{L^1(X)}$.

Retenons aussi la formule suivante ("intégration par tranches") :

(5) pour $u \in L^1(X)$ et $B(x,w) = \int_0^w b(x,v)dv$, avec $b \in L^\infty(X \times \mathbb{R})$,

$$\int B(x,u(x))dx = \iint b(x,w)\ j(u)(x,w)\ dwdx \quad ;$$

On a également (d'après Fleming et Rishel, voir [6]), lorsque (X,dx) est $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue, la relation :

(6) $TV(u) = \int TV(j(u)(.,w))dw$ (TV désignant la variation totale).

* Remarque.

Les propriétés (3),(4),(5) découlent directement du théorème de Fubini. On a en effet pour (5) par exemple :

$$\int B(x,u(x))\,dx = \int \left(\int_0^{u(x)} b(x,w)dw \right)dx$$

$$= \iint b(x,w).\left(\chi\{0<w<u(x)\} - \chi\{u(x)<w<0\} \right) dwdx$$

$$= \iint b(x,w)\; j(u)(x,w)\; dwdx$$

1.2 Définition 2

Réciproquement, étant donné $h \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, telle que $h(0)=0$,

on associe à toute f de $L^1(X\times\mathbb{R})$, la fonction $i_h(f)$ de $L^1(X)$:

(7) $$i_h(f)(x) = \int f(x,w)h'(w)dw$$

Lorsque $h(w)=w$, on notera $i(f)$ au lieu de $i_h(f)$.

On peut montrer les propriétés suivantes :

(8) $i_h(j(u)) = h \circ u$ (et en particulier $i(j(u))=u$) pour $u \in L^1(X)$;

(9) si h est convexe, alors : $h \circ i(f) \leqslant i_h(f)$

pour toute $f \in L^1(X \times \mathbb{R})$ vérifiant p.p. : $0 \leqslant \mathrm{sgn}(w) f(x,w) \leqslant 1$.

Lorsque (X,dx) est $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue, on a aussi :

(10) $TV(i(f)) \leqslant \int TV(f(.,w))dw$.

* Remarque.

La vérification de (8) est élémentaire.

Pour montrer (10) on évalue $TV(i(f))$, et pour cela on considère la quantité $\int i(f)(x).\mathrm{div}Y(x)dx$ où Y est un champ de vecteurs régulier sur R^N tel que : $|Y(x)| \leqslant 1 \ \forall x$; cette quantité vaut : $\iint f(x,w).\mathrm{div}Y(x)dxdw$ or, à w fixé, $\int f(x,w).\mathrm{div}Y(x)dx$ est majoré par : $TV(f(.,w))$; on peut donc finalement majorer par : $\int TV(f(.,w))dw$, ce qui donne bien la relation (10).

1.3 preuve de la propriété (9) :

Pour montrer la relation (9), il nous suffit d'étudier l'inégalité :

$$h\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv\right) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)h'(v)dv \quad , \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Etudions d'abord le cas où h est deux fois continûment dérivable.

On note $dr(v)$ la mesure positive de masse finie $h''(v)dv$.

L'inégalité s'écrit :

$$\int_0^{F(\infty)} h'(v)dv \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} h'(v)f(v)dv \qquad \text{où} \quad F(w)=\int_{-\infty}^{w} f(v)dv \ ;$$

ce qui donne en intégrant par parties :

$$F(\infty)h'(F(\infty)) - \int_0^{F(\infty)} v\,dr(v) \leqslant h'(\infty)F(\infty) - \int_{-\infty}^{+\infty} F(v)dr(v) \ ; \text{ soit :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(v)dr(v) \leqslant \int_0^{F(\infty)} v\,dr(v) + F(\infty)\int_{F(\infty)}^{+\infty} dr(v) \ .$$

Elle est donc verifiée si :

$$F(w) \leqslant L(w) = \int_{-\infty}^{w} l(v)dv,$$

où $l(v)$ vaut $\mathrm{sgn}(F(\infty))$ pour v compris entre 0 et $F(\infty)$, et 0 ailleurs.

Il n'est pas très difficile de s'assurer que c'est en particulier vrai lorsque : $0 \leqslant \mathrm{sgn}(w)f(w) \leqslant 1$ (on commence par normaliser F et on se ramène aux cas $F(\infty) = -1, 0$ et 1).

Lorsque h est seulement lipschitzienne, on l'approche par une suite de fonctions régulières dont les dérivées convergent p.p. vers h' en restant uniformément bornées, on se ramène au cas précédent et on passe à la limite dans l'inégalité **

2. Construction d'un opérateur non-linéaire dans $L^1(X)$ à partir d'une famille à un paramètre d'opérateurs linéaires.

2.1. On considère la classe des opérateurs T bornés dans $L^1(X)$, non nécessairement linéaires, et on s'intéresse aux propriétés suivantes :

(11) " conservation de l'intégrale ":

$$\int Tu(x)dx = \int u(x)dx \ ;$$

(12) "monotonie": $u \leqslant v$ p.p. $\Longrightarrow$ $Tu \leqslant Tv$ p.p. ;

(13) "principe du maximum":

$\operatorname{infess} u \leqslant \operatorname{infess} Tu \leqslant \operatorname{supess} Tu \leqslant \operatorname{supess} u$;

(14) "préservation de la variation totale" (dans le cas où (X,dx) est $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue) : $TV(Tu) \leqslant TV(u)$.

2.2 Soit une famille $(g_w, w \in \mathbb{R})$ d'opérateurs linéaires dans $L^1(X)$; on pose :

(15) $Gf(x,w) = g_w(f(.,w))(x)$ pour $f \in L^1(X \times \mathbb{R})$

et on suppose Gf mesurable sur $X \times \mathbb{R}$.

On a alors les propositions suivantes :

Proposition 1

* Si les g_w sont uniformément bornés dans $L^1(X)$,

alors $T=i\circ G\circ j$ définit un opérateur borné dans $L^1(X)$

et chacune des propriétés (11) à (14), prise séparément,

est vérifiée par T dès qu'elle l'est par les g_w .

* preuve de la proposition :

a. Soit $u\in L^1(X)$; posons $s=j(u)$; comme les g_w sont uniformément bornés,

on a : $\int |g_w(s(.,w))(x)|dx \leqslant C\int |s(x,w)|dx$;

donc $\iint |g_w(s(.,w))(x)|dxdw \leqslant C\iint |s(x,w)|dxdw = C\int |u(x)|dx$

compte tenu de la propriété (3) ; $Tu(x) = (iGj)u(x) = \int g_w(s(.,w))(x)dw$

est ainsi bien défini dans $L^1(X)$ et T est un opérateur borné dans $L^1(X)$.

b. Supposons que les g_w vérifient (11) ; soit $u\in L^1(X)$ et $s=j(u)$; on a :

$$\int Tu(x)dx = \iint g_w(s(.,w))(x)dwdx = \iint s(x,w)dwdx = \int u(x)dx ,$$

compte tenu de (3). T vérifie donc aussi (11).

c. Soit u et v dans $L^1(X)$ telles que : $u \leqslant v$ p.p. ; ceci se traduit exactement (vu la définition de j) par : $j(u) \leqslant j(v)$ p.p. et implique donc : $Gj(u)(x,w) \leqslant Gj(v)(x,w)$ p.p. dans $X\times\mathbb{R}$, si les g_w vérifient (12). En intégrant par rapport à w, on obtient : $iGj(u)(x) \leqslant iGj(v)(x)$ p.p. dans X , c'est-à-dire : $Tu \leqslant Tv$ p.p. ; ainsi T vérifie aussi (12).

d. Soit u telle que : $m \leqslant u(x) \leqslant M$ p.p. ; d'après la propriété (2), on a :

$$0 \leqslant \mathrm{sgn}(w)\, s(x,w) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } m \leqslant w \leqslant M \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$ où l'on a posé : $s = j(u)$;

si les g_w vérifient (13), alors : $0 \leqslant \mathrm{sgn}(w) g_w(s(.,w))(x) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } m \leqslant w \leqslant M \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$

on en déduit : $m \leqslant \int g_w(s(.,w))(x)\, dw \leqslant M$, et donc : $m \leqslant Tu(x) \leqslant M$ p.p.

e. Soit $u \in L^1(X)$ et $s = j(u)$; comme $Tu = (iGj)u$, on déduit de (10) que :

$TV(Tu) \leqslant \int TV(g_w(s(.,w)))dw$; si les g_w vérifient (14), on peut majorer

par $\int TV(s(.,w))dw$, c'est-à-dire par $TV(u)$, compte tenu de (6) **

Corollaire

Si les g_w vérifient les propriétés (11) et (12), alors T est une contraction dans L^1 :

(16) $\|Tu - Tv\|_{L^1} \leqslant \|u - v\|_{L^1} \quad \forall u,v \in L^1(X)$.

* preuve du corollaire :

Il suffit de remarquer (suivant Crandall et Tartar, voir [5]) que tout opérateur dans L^1 , monotone et conservant l'intégrale, est une contraction **

Proposition 2

Si les g_w vérifient le "principe du maximum" (13),

alors, pour $h \in Lip(\mathbb{R})$ convexe, telle que $h(0) = 0$,

on a la propriété "entropique" :

(17) $$h(Tu(x))-h(u(x)) \leqslant \int \left[(g_w - Id)j(u)(.,w)\right](x).h'(w)dw \quad \text{p.p. sur } X$$

Si de plus les g_w vérifient (11), alors :

(18) $$\int h(Tu(x))dx \leqslant \int h(u(x))dx \quad \text{et} \quad \|Tu\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^p} \quad \forall p \in [1,\infty]$$

(inégalité dans $[0,\infty]$)

* preuve de la proposition :

Pour montrer la propriété "entropique", on remarque que $Gj(u)$ vérifie :

$0 \leqslant sgn(w).Gj(u)(x,w) = sgn(w).g_w(j(u)(.,w))(x) \leqslant 1$ p.p. dans $X\times\mathbb{R}$

(parce que les g_w vérifient (13) et que : $0 \leqslant sgn(w).j(u)(x,w) \leqslant 1$ p.p.) ;

on utilise ensuite la propriété (9), pour en déduire : $h(Tu) \leqslant i_h(Gj(u))$, et la propriété (8), pour obtenir enfin : $h(Tu)-h(u) \leqslant i_h(Gj(u)) - i_h(j(u))$ ce qui équivaut à la propriété (17) annoncée, compte tenu de (7) et (15).

Lorsque les g_w vérifient (11), on a : $\iint \left[(g_w - Id)j(u)(.,w)\right](x)dwdx = 0$ et, en intégrant (17) par rapport à x, on obtient le début de (18).

Pour ce qui est des normes L^p, il faut d'abord mettre à part le cas $p=\infty$ (le résultat découle de la proposition 1: T vérifie le principe du maximum) et dans les autres cas approcher les fonctions $|.|^p$ par des fonctions convexes lipschitziennes **

3. Application aux équations aux dérivées partielles semi-linéaires.

3.1. Principe.

* Etant donné un pas de temps δt et une famille $((S_w(t), t \in \mathbb{R}_+);\ w \in \mathbb{R})$ de semi-groupes linéaires sur $L^1(\mathbb{R}^N)$, on peut poser :

(19) $g_w = S_w(\delta t)$,

et ainsi construire un opérateur $T_{\delta t}$, non-linéaire, sur $L^1(\mathbb{R}^N)$, suivant le procédé qu'on vient d'exposer. Notons que la propriété "entropique" de la proposition 2 est vérifiée si les semi-groupes <u>vérifient le principe du maximum</u> et se traduit par la relation :

(20) $$\frac{h(T_{\delta t}\, u(x)) - h(u(x))}{\delta t} \leqslant \int \left[\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right) ju(.,w)\right](x)\ h'(w)dw \quad \text{p.p.}$$

* Indiquons <u>d'abord formellement</u> comment cette construction s'applique à certaines équations aux dérivées partielles semi-linéaires. Supposons qu'à w fixé, le semi-groupe $S_w(t)$ ait pour générateur infinitésimal un opérateur différentiel linéaire sur $\mathbb{R}^N$:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} D^{\alpha}(b_{\alpha}(x,w).\ ) \qquad \text{(où m est une constante entière} \geqslant 1 \text{ fixée)}$$

et qu'il <u>vérifie le principe du maximum (13)</u>.

Multiplions la relation (20) par une fonction test $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, positive, intégrons sur $\mathbb{R}^N$ et passons à la limite, en faisant tendre δt vers 0. On obtient alors formellement, pour $h \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, convexe :

$$\lim_{\delta t \to 0} \int \frac{h(T_{\delta t} u(x)) - h(u(x))}{\delta t} f(x)dx$$

$$\leqslant \iint j(u)(x,w) \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha(x,w).D^\alpha f(x)h'(w)dwdx ,$$

le terme de droite s'écrivant encore (suivant la formule (5)) :

$$\int \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} B_{\alpha,h}(x,u(x)).D^\alpha f(x)dx \qquad \text{où :}$$

(21) $$B_{\alpha,h}(x,w) = \int_0^w b_\alpha(x,v)h'(v)dv .$$

En particulier, en prenant successivement $h(w)=w$ et $h(w)=-w$, et en posant $B_\alpha(x,w) = \int_0^w b_\alpha(x,v)dv$, on obtient :

$$\lim_{\delta t \to 0} \int \frac{T_{\delta t} u(x) - u(x)}{\delta t} f(x)dx = \int \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} B_\alpha(x,u(x)).D^\alpha f(x)dx$$

De ce fait, si $\lim_{n\to\infty} (T_{t/n})^n u_o$ existe et définit une fonction $u(t,x)$ dans $C^o(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$, on peut s'attendre à ce que cette fonction soit solution faible du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$:

$$(22)\quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha (B_\alpha(x,u(t,x))) & x\in\mathbb{R}^N,\ t>0 \\ u(x,0)=u_o(x) \end{cases}$$

On peut même parler de solution "entropique", par référence aux travaux de Kružkov ou Volpert (voir [8] et [12]),
u vérifiant, pour toute fonction $h\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ convexe, l'inégalité :

$$(23)\quad \partial_t (h(u)) \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha (B_{\alpha,h}(x,u)) \quad \text{(au sens des distributions sur } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^*).$$

On peut rendre ce raisonnement rigoureux comme suit.

3.2. Estimations

En premier lieu on s'assure de l'existence d'une limite ; pour cela, on introduit les hypothèses suivantes (avec les notations de 3.1) :

(24) Quel que soit $t>0$, les $S_w(t)$ vérifient les propriétés (11) à (14) ;

(25) Pour $f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $t>0$ quelconques :

$$\int f(x).\left(\frac{S_w(t) - id}{t}\right)v(x)dx \quad \text{est majorée par } K(f).\|v\|_{L^1}$$

où $K(f) = C.\sup\{\ |D^{\alpha}f(x)|\ ;\ x\in\mathbb{R}^N\ ;\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$;

et, lorsque t tend vers 0, converge p.p. en w sur $\mathbb{R}$ vers :

$$\int v(x)b_{\alpha}(x,w)\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}f(x)dx \quad \text{où les } b_{\alpha} \text{ appartiennent à } L^{\infty}(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}).$$

(26) Il existe un sous-espace E dense de $L^1(\mathbb{R}^N)$, dont tous les éléments u vérifient : $TV(u) < \infty$ et $\|T_t u - u\|_{L^1} \leqslant C(u).t \quad \forall t>0$;

<u>Remarques sur ces hypothèses.</u>

* L'hypothèse (24) est un peu forte : la propriété la plus importante que doivent vérifier les $S_w(t)$ est le principe du maximum (13).
Les propriétés (11) et (14) permettent seulement de simplifier les démonstrations et auraient pu être affaiblies comme suit :

(11') $\sup_{w\in\mathbb{R}} \|S_w(t)u\|_{L^1} \leqslant \|u\|_{L^1}.\exp(Ct)$, $\forall t>0$, $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N)$;

(14') $\sup_{w\in\mathbb{R}} TV(S_w(t)u) \leqslant TV(u).\exp(Ct)$, $\forall t>0$, $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

* Dans l'expression de K(f) (hypothèse (25)) ne figurent -à dessein- que les derivées d'ordre >0 de f.

* Contrairement aux précedentes, l'hypothèse (26) concerne l'opérateur T_t lui-même et non pas simplement les $S_w(t)$: elle est donc

a priori plus difficile à vérifier. Elle équivaut approximativement à une hypothèse de régularité sur le problème de Cauchy (22) *

Ces hypothèses faites,

on construit alors, pour $\delta t>0$ et pour $u_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la fonction :

(27) $t \longmapsto u_{\delta t}(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, affine sur chaque intervalle $[k\delta t,(k+1)\delta t]$, et valant $(T_{\delta t})^k u_o$ au point $t=k\delta t$, $k\in\mathbb{N}$.

On a le résultat suivant :

Proposition 3

> Sous les hypothèses (24),(25),(26) et pour $u_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$,
> l'ensemble $\{ u_{\delta t}, \delta t>0\}$, défini par (27),
> est relativement compact dans $C^o(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$

* rappel :

La topologie de $C^o(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$ est définie par les semi-normes :

$v \longmapsto \sup_{t\in I} \int_{\mathbb{R}^N} |v(t,x)|dx$, I décrivant l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}_+$.

$C^o(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$ est un espace métrisable.

* preuve de la proposition :

a. Notons d'abord qu'il suffit de montrer la proposition dans le cas où $u_o \in E$. Le résultat se généralise par densité (pour plus de détails, voir annexe 1), grâce à la propriété (16) que vérifie $T_{\delta t}$ (en même temps que les propriétés (11),(12),(13),(14),(17),(18)), en raison de l'hypothèse (24).

b. De l'hypothèse (26), on deduit que les $u_{\delta t}$ sont équicontinus de $\mathbb{R}_+$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$; en effet, on a, pour t et s dans $[k\delta t,(k+1)\delta t]$:

$$\|u_{\delta t}(t) - u_{\delta t}(s)\| = \frac{|t-s|}{\delta t}.\|u_{\delta t}((k+1)\delta t) - u_{\delta t}(k\delta t)\| \qquad (\text{ici} : \|.\| = \|.\|_{L^1})$$

- parce que $u_{\delta t}$ est affine sur l'intervalle -

$$= \frac{|t-s|}{\delta t}.\|(T_{\delta t}^{k+1} - T_{\delta t}^{k})u_o\| \leqslant \frac{|t-s|}{\delta t}.\|T_{\delta t}u_o-u_o\|$$

(car $T_{\delta t}$ est une contraction) $\leqslant C(u_o).|t-s|$ (hypothèse (26)) ;

et, de même, si $(k-1)\delta t \leqslant s \leqslant k\delta t < (k+r)\delta t \leqslant t \leqslant (k+r+1)\delta t$:

$$\|u_{\delta t}(t) - u_{\delta t}(s)\| \leqslant \frac{|t-(k+r)\delta t|}{\delta t}.\|(T_{\delta t}^{k+r+1} - T_{\delta t}^{k+r})u_o\|$$

$$+ \frac{|s-k\delta t|}{\delta t}.\|(T_{\delta t}^{k} - T_{\delta t}^{k-1})u_o\| + \sum_{p=1,r}\|(T_{\delta t}^{k+p} - T_{\delta t}^{k+p-1})u_o\|$$

$$\leqslant \left(|t-(k+r)\delta t|+|s-k\delta t|+ r\delta t \right).C(u_o) = |t-s|.C(u_o) .$$

c. Montrons qu'à t fixé $\{u_{\delta t}(t), \delta t>0\}$ est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Cet ensemble est borné en norme L^1 et en variation totale, dès que u_o est intégrable et à variation bornée .

On a en effet (grâce aux propriétés (14) et (18)) :

$$TV(T^k_{\delta t}\, u_o) \leqslant TV(u_o) \quad ; \quad \|T^k_{\delta t}\, u\|_{L^p} \leqslant \|u_o\|_{L^p} , \quad \forall p \in [1,\infty] \quad \text{d'où :}$$

$$TV(u_{\delta t}(t)) \leqslant TV(u_o) \quad ; \quad \|u_{\delta t}(t)\|_{L^p} \leqslant \|u_o\|_{L^p} \text{ (compte tenu de (27))}$$

Il est donc relativement compact dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, en vertu du théorème de Helly. Cela ne nous suffit pas, il nous faut la compacité dans $L^1(\mathbb{R}^N)$; un moyen de l'obtenir est de dégager l'estimation à l'infini (uniforme par rapport a δt) :

$$\sup_{\delta t>0} \int_{|x|\geqslant R} |u_{\delta t}(t,x)|dx \to 0 \;,\; R\to\infty \text{, ou encore :}$$

(28) $$\sup_{\delta t>0} \int f(x/R).|u_{\delta t}(t,x)|dx \to 0 \;,\; R\to\infty$$

où f est une fonction fixée, régulière à dérivées bornées, positive, qui vaut 0 pour $|x| \leqslant 1$, et 1 pour $|x| \geqslant 2$.

Or, en utilisant la propriété (20), on a pour toute $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\int |T_{\delta t}\, v(x)|f(x/R)dx - \int |v(x)|f(x/R)dx$$

$$\leqslant \iint f(x/R).\left[(S_w(\delta t) - id)\chi v(.,w)\right](x)\,sgn(w)dxdw$$

et grâce à l'hypothèse (25), on peut majorer le terme de droite par :

$$C.\delta t.\iint |jv(x,w)|dxdw.\ \sup\{\ (1/R)^{|\alpha|}|(D^{\alpha}f)(x/R)|\ ;\ x\in\mathbb{R}^N;\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$$

et donc par : $\delta t.\|v\|_{L^1}.O(1/R)$ (compte tenu de (3)). On en déduit :

$$\int f(x/R).|(T_{\delta t}^{\ n})\ v(x)|dx\ \leqslant \int f(x/R).|v(x)|dx + n.\delta t.\|v\|_{L^1}.O(1/R)$$

(par récurrence sur n, et compte tenu de (18)).

D'ou la relation (28) et, par conséquent, la compacité dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

d. Dans ces conditions, on sait par le théorème d'Ascoli que l'ensemble $\{u_{\delta t}, \delta t>0\}$ est relativement compact dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$ **

3.3. Convergence.

* Supposons que la famille $(u_{\delta t}, \delta t>0)$, définie par (27), ait une valeur d'adhérence u dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$, quand δt tend vers 0.

Cette valeur d'adhérence vérifie nécessairement :

(29) $u(.,0)=u_o$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

(parce que les $u_{\delta t}$ sont continues, valent u_o en t=0 et convergent uniformément).

On peut d'autre part passer à la limite dans (20) grâce à l'hypothèse (25) (voir le détail dans l'annexe 2), ce qui permet d'énoncer :

Proposition 4

Sous les hypothèses (24) et (25), toute valeur d'adhérence dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$, des $u_{\delta t}$ quand $\delta t \longrightarrow 0$, est solution du problème de Cauchy (22), au sens de (29) et (23)

Théorème 1

Sous les hypothèses (24),(25) et (26), et pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le problème de Cauchy (22), au sens de (23) et (29), admet au moins une solution dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$.

Si, en outre, la solution est unique, alors elle s'écrit :

$$u(.,t) = \lim_{n \to \infty} (T_{t/n})^n \, u_0 \quad (\text{dans } L^1(\mathbb{R}^N))$$

4. Continuité des solutions par rapport aux données.

4.1. Lorsque nous avons défini la famille ($u_{\delta t}$,$\delta t>0$) par (27), les fonctions $b_\alpha(.,.)$ et la donnée initiale u_o étaient fixées.

Si nous faisons varier $q = (b_\alpha(.,.), |\alpha|\leqslant m)$ dans une partie Q de $L^\infty(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})$, et $v = u_o$ dans une partie V de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on peut alors définir la famille :

$$(u[\delta t,q,v] \ ; \ \delta t>0, q\in Q, v\in V) .$$

En reconsidérant les paragraphes 3.2. et 3.3., on s'aperçoit que si les $q = (b_\alpha(.,.), |\alpha|\leqslant m)$ convergent p.p. sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ vers une limite q^*, tout en restant bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})$, si les v convergent dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers une limite v^*, et si δt tend vers 0, l'énoncé de la proposition 3 reste valable pour les $u[\delta t,q,v]$, à condition de supposer les hypothèses (25) et (26) uniformément vérifiées par rapport à q , c'est-à-dire (avec des notations évidentes) :

$$\sup_{q\in Q} K(f,q) < +\infty \qquad \sup_{q\in Q} C(u,q) < +\infty$$

De plus, il apparaît (en reprenant le contenu de l'annexe 2) qu' alors toute valeur d'adhérence des $u[\delta t,q,v]$ est solution du problème de Cauchy (22) correspondant aux données limites v^* et q^*.

Supposons que Q et V sont fermés respectivement pour la convergence presque partout et pour la norme L^1.

S'il n'y a qu'une solution au problème de Cauchy (22) pour chaque $(q^*,v^*) \in Q \times V$, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$u[q^*,v^*] = \lim_{\substack{\delta t \to 0 \\ q \to q^* \\ v \to v^*}} u[\delta t,q,v] .$$

Il en résulte la continuité de la solution par rapport aux données,

puisque : $$u[q^*,v^*] = \lim_{\substack{q \to q^* \\ v \to v^*}} \{ \lim_{\delta t \to 0} u[\delta t,q,v] \} = \lim_{\substack{q \to q^* \\ v \to v^*}} u[q,v]$$

On peut résumer ces résultats comme suit :

Théorème 2 : "continuité des solutions par rapport aux données"

Supposons que les coefficients $q = (b_\alpha(.,.), |\alpha| \leqslant m)$ varient dans une partie Q bornée de $L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ fermée pour la convergence p.p. et les données initiales v dans une partie V fermée de $L^1(\mathbb{R}^N)$, telles que :

1) les propriétés (24),(25),(26) soient uniformément vérifiées ;

2) le problème de Cauchy associé (22) -au sens de (23) et (29)- ait pour chaque $(q,v) \in Q \times V$ au plus une solution ;

Alors :

1) le problème de Cauchy (22) a une unique solution u[q,v] dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$, qui dépend continûment des données, $q \in Q$ (pour la convergence p.p.) et $v \in V$ (pour la norme L^1) ;

2) la solution approchée $u[\delta t,q,v]$ donnée par (27) converge dans $C^0(\mathbb{R}_+;L^1(\mathbb{R}^N))$ vers u[q,v] quand δt tend vers 0 ; on peut de plus remplacer q et v en les approchant respectivement dans Q en convergence p.p. et dans V en norme L^1.

5. Un exemple : les lois de conservation scalaires.

5.1. Nous allons maintenant traiter le cas particulier de l'équation :

(30) $$\partial_t u + \mathrm{div}(B(u)) = 0$$

avec $B(w) = \int_0^w b(v)dv$

où b est supposée mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{R}^N$.

Conformément au paragraphe 3, on introduit, pour chaque $w \in \mathbb{R}$, le semi-groupe $S_w(t)$ de générateur infinitésimal :

(31) $$-b(w).\mathrm{grad}$$

Dans ce cas simple (b ne dépendant ni de x ni de t), on peut expliciter $S_w(t)$ par la formule :

(32) $$S_w(t)(u)(x) = \quad u(x-tb(w)) \quad .$$

La vérification des hypothèses (24) et (25) est élémentaire.

5.2. vérification de l'hypothèse (26).

Soit u, intégrable et à variation bornée sur $\mathbb{R}^N$.

On a : $\|T_t u - u\|_{L^1} = \int \left| \int \left[(S_w(t) - Id) ju(.,w) \right](x) dw \right| dx$

$$= \int \left| \int [ju(x-tb(w),w) - ju(x,w)]dw \right| dx$$

$$\leqslant \iint |ju(x-tb(w),w) - ju(x,w)|dxdw$$

$$\leqslant t.\|b\|_{L^\infty} \int TV(ju(.,w))dw$$

(une propriété bien connue de la variation totale -qui peut d'ailleurs servir à la définir- est que pour $h \in \mathbb{R}^N$: $\int |v(x+h)-v(x)|dx \leqslant |h|.TV(v)$) ;

On a donc, compte tenu de (6) :

(33) $\quad \|T_t u - u\|_{L^1} \leqslant t.\|b\|_{L^\infty}.TV(u)$.

Ainsi l'hypothèse (26) est vérifiée

(E étant l'espace des fonctions intégrables et à variation bornée sur $\mathbb{R}^N$).

5.3. <u>le théorème de convergence.</u>

Rappelons qu'une solution entropique de (30) est une fonction u(t,x) localement intégrable vérifiant pour toute fonction h lipschitzienne et convexe l'inégalité au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$:

(34) $\quad \partial_t(h(u)) + \mathrm{div}(B_h(u)) \leqslant 0 \quad$ où $B_h(w) = \int_0^w b(v)h'(v)dv$

Remarque : la formulation de Kružkov [8] ne prend en compte que les fonctions h(w) du type |w-c| -où c décrit $\mathbb{R}$- ; mais cela revient au même, parce qu'elles "engendrent" toutes les fonctions convexes lipschitziennes.

Nous pouvons finalement énoncer, en nous appuyant sur le théorème d'unicité de Kružkov ([8]) -qu'il faut d'ailleurs adapter puisque Kružkov considère ses solutions dans $L^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{*}\times\mathbb{R}^{N})$ et non dans $C^{0}(\mathbb{R}_{+};L^{1}(\mathbb{R}^{N}))$ -(voir annexe 3) :

Théorème 3

Si l'application $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est lipschitzienne,

alors pour toute donnée initiale u_0 dans $L^1(\mathbb{R}^N)$,

il existe une unique solution entropique u(t,x) de l'équation :

$$\partial_t u + \mathrm{div}(B(u))=0$$

Cette solution est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et peut s'écrire :

$$u(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (T_{t/n})^n . u_0 \quad (\text{dans } L^1(\mathbb{R}^N))$$

6. Extension
aux équations paraboliques semi-linéaires dégénérées.

6.1. Nous considérons maintenant l'équation :

(35) $$\partial_t u + \operatorname{div}(B(u) - \operatorname{grad}(A(u))) = 0$$

avec $A(w) = \int_0^w a(v)dv$ et $B(w) = \int_0^w b(v)dv$

où b et a sont supposées mesurables bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$. On fait l'hypothèse suivante :

(36) $$a(w) \geqslant 0 \ , \forall w \in \mathbb{R} \ ;$$

c'est une hypothèse de parabolicité "faible", qui englobe le cas hyperbolique pur (cf. Volpert [12]).

Conformément au paragraphe 3, on introduit, pour chaque $w \in \mathbb{R}$, le semi-groupe $S_w(t)$ de générateur infinitésimal :

(37) $$- b(w).\operatorname{grad} + a(w)\Delta.$$

Dans ce cas simple (a et b ne dépendant ni de x ni de t), on peut expliciter $S_w(t)$ par la formule :

(38) $$S_w(t)(u)(x) = \int u(x - tb(w) - \sqrt{2ta(w)}.y).g(y)dy \quad , \text{où :}$$

(39) $$g(y) = (2\pi)^{-N/2}.\exp(-\frac{1}{2}|y|^2) \ , \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

La vérification des hypothèses (24) et (25) est élémentaire.

Il n'en est pas de même de l'hypothèse (26), sauf dans le cas hyperbolique pur (voir paragraphe 5)

6.2. vérification de l'hypothèse (26).

Soit $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$; pour évaluer $\|T_t u - u\|_{L^1}$ considérons une fonction test

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et l'intégrale $\int (T_t u(x)-u(x))f(x)dx$ qui vaut :

$$\int \left[(S_w(t) - Id)ju(.,w)\right](x).f(x)dxdw \quad \text{(compte tenu de (20))},$$

soit : $\int dw \int dx \int dy \ \ f(x).[ju(x-tb(w)-\sqrt{2a(w)t}.y,w) - ju(x,w)].g(y)$

Séparons cette integrale en deux termes I' et I" :

$$I' = \int dw \int dx \int dy \ \ f(x).[ju(x-\sqrt{2a(w)t}.y,w) - ju(x,w)].g(y)$$

$$I'' = \int dw \int dx \int dy \ \ f(x).[ju(x-tb(w)-\sqrt{2a(w)t}.y,w) - ju(x-\sqrt{2a(w)t}.y,w)].g(y)$$

On peut majorer la valeur absolue du second par :

$$\|f\|_{L^\infty}.\int dw \int dx \ \ |ju(x-tb(w),w) - ju(x,w)|$$

(en utilisant le changement de variable $x \longmapsto x-\sqrt{2a(w)t}.y$, à y fixé, et en notant que g(y)dy a pour masse 1) ;

ce terme (qui correspond au cas hyperbolique pur) est majoré par :

$$t.\|b\|_{L^\infty}.\|f\|_{L^\infty}.\int TV(ju(.,w))dw \qquad \text{(voir paragraphe 5)}$$

On a donc, compte tenu de (6) :

(40) $$|I''| \leqslant t.\|f\|_{L^\infty}.\|b\|_{L^\infty}.TV(u) .$$

Intéressons nous maintenant a I', qu' on peut écrire sous la forme :

$$I' = \int dw \int dx \int dy \quad ju(x,w).[f(x+\varepsilon r(w).y) - f(x)].g(y)$$

(où $\varepsilon = \sqrt{t}$ et $r(w) = \sqrt{2a(w)}$) ; soit encore :

$$I' = \int dw \int dx \int dy \int ds \quad ju(x,w).\chi\{0<s<r(w)\} .\varepsilon y g(y).\mathrm{grad} f(x+\varepsilon sy)$$

(parce que : $f(x+\varepsilon r(w).y) - f(x) = \int_0^{r(w)} \varepsilon y.\mathrm{grad} f(x+\varepsilon sy)ds$)

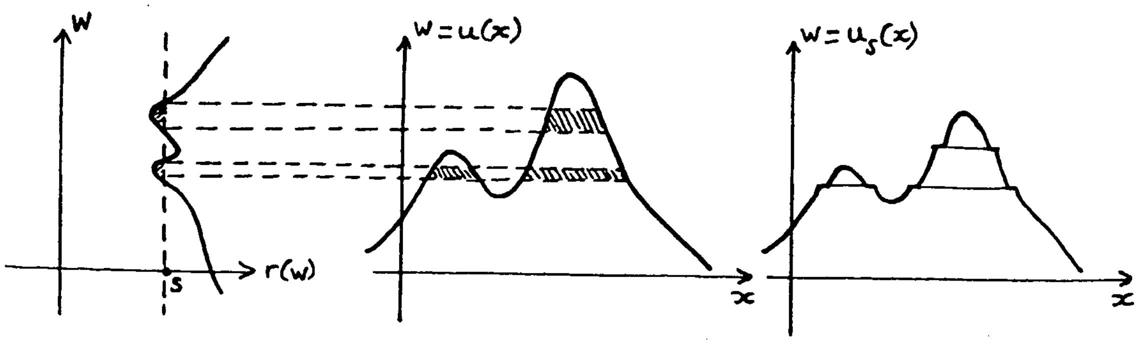
Comme $yg(y) = -\mathrm{grad}g(y)$, on obtient en intégrant par partie en y :

$$I' = \int dw \int dx \int dy \int ds \; ju(x,w).\chi\{0<s<r(w)\} . \varepsilon^2 g(y)s\Delta f(x+\varepsilon sy)$$

soit : $I' = \int g(y)dy \int sds \int dx.u_s(x)\Delta f(x+\varepsilon sy)$

où l'on pose pour $s \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$: $u_s(x) = \int ju(x,w)\chi\{0<s<r(w)\} dw$

De manière imagée, on peut dire que u_s s'obtient à partir de u , en retirant toutes les coupes w = cte du sous-graphe $\{(x,w) ; u(x)< w\}$, pour lesquelles $r(w) \leqslant s$ (voir figure).



On voit que :

(41) $\quad \mathrm{grad}\, u_s(x) = M_s(x).\mathrm{grad}u(x)$ où $M_s(x) = \chi\{r(u(x)) > s\}$

et donc : $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\left|\int u_s(x)\Delta\varphi(x)dx\right| \leqslant \begin{cases} \{ TV(M_s)\|\mathrm{grad}u\|_{L^\infty} + \|\Delta u\|_{L^1}\}.\|\varphi\|_{L^\infty} & \text{si } 0<s< \|r\|_{L^\infty} \\ 0 \text{ si non .} \end{cases}$$

Ainsi on peut majorer $|I'|$ par :

$$\int \|f\|_{L^\infty} g(y)dy.\{ \|\mathrm{grad}u\|_{L^\infty}\int s.TV(M_s)ds + \|\Delta u\|_{L^1}\int_0^R sds\} \quad \text{où } R = \|r\|_{L^\infty}.$$

Comme $\displaystyle\int s.TV(M_s)ds = \frac{1}{2}\int TV(N_s)ds = \frac{1}{2}TV(r^2(u)) = TV(a(u))$

(où $N_s(x) = \chi\{r^2(u(x)) > s\}$), on a finalement :

(42) $\quad |I'| \leqslant \quad t.\|f\|_{L^\infty}.\{ TV(a(u)).\|\mathrm{grad}u\|_{L^\infty} + \|a(u)\|_{L^\infty}.\|\Delta u\|_{L^1}\}.$

En rassemblant (40) et (42), on obtient que la norme de $T_t u - u$, en tant que mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$, qui est égale à sa norme L^1, est majorée par :

$$t.\{ \|b\|_{L^\infty}.TV(u) + TV(a(u)).\|\mathrm{grad}u\|_{L^\infty} + \|a(u)\|_{L^\infty}.\|\Delta u\|_{L^1}\}.$$

Ainsi l'hypothèse (26) est vérifiée, en prenant par exemple $E = C_c^2(\mathbb{R}^N)$, a condition de supposer $w \mapsto a(w)$ lipschitzienne. Les résultats des paragraphes 3 et 4 (propositions 3,4 et théorème 1,2) sont alors valables pour l'équation (35).

Nous définirons donc comme solution entropique de (35), toute fonction u(t,x) localement intégrable, vérifiant pour toute fonction h convexe et lipschitzienne l'inégalité au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$:

$$(43) \quad \partial_t (h(u)) + \operatorname{div}(B_h (u) - \operatorname{grad}(A_h (u))) \leqslant 0 \qquad \text{où } B_h (w) = \int_0^w b(v)h'(v)dv$$

$$\text{et } A_h (w) = \int_0^w a(v)h'(v)dv \; .$$

Nous n'avons pas résolu la question de l'unicité de telles solutions mais on peut espérer une réponse positive, compte tenu du travail de Volpert ([12]).

6. Annexe 1 : un lemme pour la proposition 3.

l'extension par densité du résultat de la proposition 3 est justifiée par le lemme suivant :

Lemme

* Soit F et H des espaces métrisables, G un ensemble quelconque.

Soit $(z(s,.), s \in G)$ une famille d'applications de F dans H telle que :

$d_H(z(s,u), z(s,v)) \leqslant d_F(u,v) \quad \forall u,v \in F, \forall s \in G$;

Soit M l'ensemble des $u \in F$ pour lesquels $\{z(s,u), s \in G\}$ est relativement compact dans H.

Cet ensemble est fermé (et donc coïncide avec F s'il est dense) *

On appliquera le lemme en posant :

$F = L^1(R^N)$, espace des données initiales ;

$G = \mathbb{R}_+$, espace des pas de temps δt ;

$H = C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N))$, espace des solutions ;

M contenant l'espace des données initiales vérifiant l'hypothèse (26).

Preuve du lemme

On procède par extraction diagonale. Précisément, soit (u_p) une suite de points de M convergeant vers $u \in F$. Pour montrer que $u \in M$, c'est-à-dire que $\{z(s,u), s \in G\}$ est relativement compact dans H, il nous faut trouver, étant donné une suite (s_n) dans G, une sous-suite extraite telle que son image par $z(.,u)$ soit de Cauchy dans H.

Or on peut trouver une suite (n_p) d'injections croissantes $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que pour chaque p, la suite $(z(s_{N_p(k)}, u_p), k \in \mathbb{N})$ soit de Cauchy dans H, où $N_p = n_p \circ n_{p-1} \circ \ldots \circ n_0$.

De plus, on peut trouver une suite croissante (K_p) d'entiers tels que :

$$d_H(z(s_{N_p(m)}, u_p), z(s_{N_p(k)}, u_p)) \leqslant (p+1)^{-1} \quad \text{pour } m,k \geqslant K_p .$$

On vérifie alors sans peine que $(z(s_{N_p(K_p)}, u_p), p \in \mathbb{N})$ est de Cauchy dans H.

7. Annexe 2 : démonstration de la proposition 4.

Il s'agit de passer à la limite dans la relation (20), en vue d'obtenir,

pour $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^N)$, positive :

(A0) $I \leqslant J$ où $I = -\iint \partial_t f(t,x)h(u(t,x))dxdt$

et $J = \iint \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} B_{\alpha,h}(x,u(t,x))D^\alpha f(t,x)dxdt$

= (à cause de (5) et (21))

$$\iiint \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} b_\alpha(x,w)ju(t)(x,w)D^\alpha f(t,x)h'(w)dxdwdt$$

Introduisons : $t_k = k\delta t$, $k=0,1,2,\dots$.

On déduit de (20) la relation : $I1 \leqslant J1$ où I1 et J1 sont définis par :

(A1) $$I1 = \delta t \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f(t_k,x) \cdot \frac{h(u_{\delta t}(t_{k+1},x)) - h(u_{\delta t}(t_k,x))}{\delta t} .dx$$

(A2) $$J1 = \delta t \sum_{k\in\mathbb{N}} \iint f(t_k,x) \cdot \left[\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right)ju_{\delta t}(t_k)(.,w)\right](x)h'(w)dwdx$$

Introduisons également :

(A3) $$J2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \iint f(t_k,x) \cdot \left[\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right)ju_{\delta t}(t)(.,w)\right](x)h'(w)dwdxdt$$

$$\text{(A4)}\quad J3 = \iiint f(t,x).\left[\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right)ju_{\delta t}(t)(.,w)\right](x)h'(w)dwdxdt$$

$$\text{(A5)}\quad J4 = \iiint f(t,x).\left[\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right)ju(t)(.,w)\right](x)h'(w)dwdxdt$$

Evaluons J1 - J ; à l'aide de l'hypothèse (25), on a :

$$|J1 - J2| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \iint_{t_k}^{t_{k+1}} K(f,t_k).\|ju_{\delta t}(t)(.,w)-ju_{\delta t}(t_k)(.,w)\|_{L^1}.|h'(w)|dwdt$$

$$\leqslant C(f,h).\|T_{\delta t}u_o-u_o\|_{L^1}$$

(en effet :

$$\int \|ju_{\delta t}(t)(.,w)-ju_{\delta t}(t_k)(.,w)\|_{L^1}dw \leqslant \|u_{\delta t}(t)-u_{\delta t}(t_k)\|_{L^1} \text{ (a cause de (4))}$$

$$\leqslant \|T^{k+1}_{\delta t}u_o-T^{k}_{\delta t}u_o\|_{L^1} \quad \text{(compte tenu de (27))} \quad \leqslant \|T_{\delta t}u_o-u_o\|_{L^1} \quad) ;$$

$$|J2 - J3| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \iint_{t_k}^{t_{k+1}} K(f(t_k,.)-f(t,.)).\|ju_{\delta t}(t)(.,w)\|_{L^1}.|h'(w)|dwdt$$

$\leqslant \delta t.C(f,h).\|u_o\|_{L^1}$ (vu la définition de K dans (25) et compte tenu de ce que : $\int \|ju_{\delta t}(t)(.,w)\|_{L^1}dw = \|u_{\delta t}(t)\|_L \leqslant \|u_o\|_{L^1}$) ;

$$|J3 - J4| \leqslant \iint K(f(t,.)).\| ju_{\delta t}(t)(.,w) - ju(t)(.,w)\|_{L^1} .|h'(w)|dwdt$$

$\leqslant \quad C(f,h).\sup_{t\in I(f)} \|u_{\delta t}(t)-u(t)\|_{L^1}$ (où $I(f)$ est un compact de $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $f(t,x)=0$ si $t \notin I(f)$) ;

Ainsi : $|J1 - J4| \leqslant C(f,h).\{ \|T_{\delta t} u_o - u_o\|_{L^1} + \delta t.\|u_o\|_{L^1} + \sup_{t\in I(f)} \|u_{\delta t}(t)-u(t)\|_{L^1} \}$

Cette quantité tend vers 0 avec δt, puisque d'une part $u_{\delta t}$ converge vers u dans $C^o(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N))$, et que d'autre part on a pour tout $u_o \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

(A6) $\lim_{\delta t \longrightarrow 0} \|T_{\delta t} u_o - u_o\|_{L^1} = 0$

(cette relation découle facilement de (16) et (26) : on choisit $v_o \in E$ telle que $\|u_o - v_o\|_L \leqslant \varepsilon$; d'après (16), on a : $\|T_{\delta t} u_o - T_{\delta t} v_o\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$;
v_o etant fixé, on a pour δt assez petit :
$\|T_{\delta t} v_o - v_o\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$ -d'après (26)- ; d'où : $\|T_{\delta t} u_o - u_o\|_{L^1} \leqslant 3\varepsilon$).

Enfin, on vérifie sans peine que J4 converge vers J, en vertu de la seconde partie de l'hypothèse (25) et à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue (en effet, pour presque tout $t,w \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\int f(t,x).\left(\frac{S_w(\delta t) - Id}{\delta t}\right) ju(t)(.,w)(x)h'(w)dx \quad \text{converge vers :}$$

$$\int \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} ju(t)(x,w)b_{\alpha}(x,w)D^{\alpha}f(t,x)h'(w)dx \ ,$$

et est dominée par $|h'(w)|.K(f(t,.))\|ju(t)(.,w)\|_{L^1}$, quantité intégrable en t,w sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$).

On a ainsi montré que J1 converge vers J quand δt tend vers 0 et on montrerait de même la convergence de I1 vers I. En passant à la limite dans l'inégalite I1 $\leqslant$ J1, on obtient le résultat voulu, à savoir (A0) *

8. Annexe 3 : adaptation du théorème d'unicité de Kružkov.

Kružkov a démontré (dans [8]) l'unicité des solutions de (34), lorsque la donnée B est localement lipschitzienne et lorsque les solutions sont dans $L^{\infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N)$. Nous nous proposons d'adapter ce résultat au cas ou les solutions sont dans $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N))$, la donnée B étant lipschitzienne.

Pour prouver l'unicité, il suffit de démontrer que deux solutions de (34) $u_1, u_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N))$, vérifient l'inégalité au sens des distributions :

(A7) $$\partial_t (|u_1 - u_2|) + \operatorname{div}[\operatorname{sgn}(u_1 - u_2)(B(u_1) - B(u_2))] \leqslant 0, \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N;$$

dont on déduit aisément la relation de stabilité (qui implique l'unicité):

(A8) $$\int_{\mathbb{R}^N} |u_1(t,x) - u_2(t,x)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(0,x) - u_2(0,x)|\,dx .$$

On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme

* Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^M$, $\mathbf{F}$ une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^M$, et soit $u_1(y), u_2(y) \in L^1_{loc}(U)$,

  vérifiant, pour tout c réel, au sens des distributions sur U :

(A9) $$\nabla \cdot [\operatorname{sgn}(u_i - c)(\mathbf{F}(u_i) - \mathbf{F}(c))] \leqslant 0, \quad i=1,2 \quad ;$$

Alors, on a au sens des distributions sur U :

(A10) $$\nabla\cdot[\mathrm{sgn}(u_1-u_2)(F(u_1)-F(u_2))] \leqslant 0$$ *

L'inégalité (A7) découle directement du lemme, en posant :

$M = N+1$; $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$; $y = (t,x) \in U$; $\nabla = (\partial_t, \mathrm{grad})$; $F(w) = (B(w),w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

et en prenant : $h(w)=|w-c|$ dans (34) .

Preuve du lemme :

Introduisons, pour a,b réels : $H(a,b)=\mathrm{sgn}(a-b)(F(a)-F(b)) \in \mathbb{R}^M$;

l'application H vérifie la propriété suivante :

(A11) $|H(a,b)-H(b,c)| \leqslant L.|a-c|$, $\forall$ $a,b,c \in \mathbb{R}$,

où $|.|$ est une norme fixée sur $\mathbb{R}^M$ et L la constante de Lipschitz de F, associée à cette norme.

Soit r une fonction positive, C^∞, à support contenu dans la boule unité B de $\mathbb{R}^M$, d'intégrale égale à 1, et vérifiant : $r(-x)=r(x)$.

Soit $f \in C_c^\infty(U)$, une fonction test positive et fixée.

A partir de (A9), on obtient élémentairement (voir [8]) :

(A12) $$\int_U\int_U H(u_1(y_1),u_2(y_2)).\nabla f(\tfrac{1}{2}(y_1+y_2))\, r_\varepsilon((y_1-y_2))dy_1\, dy_2 \geqslant 0 ,$$

où : $r_\varepsilon(y)=(\varepsilon)^{-M} r(y/\varepsilon)$ et ε varie dans $]0,\delta]$,

δ étant choisi assez petit pour que $K = \mathrm{supp}(f) + \delta.B$ soit un compact de U.

En passant formellement à la limite dans (A12) en ε, on obtient :

(A13) $$\int H(u_1(y),u_2(y)).\nabla f(y)dy \geq 0 ,$$

ce qui est précisément la relation qu'on désire obtenir.

On trouvera dans Kružkov [8] la justification du passage à la limite, lorsque u_1 et u_2 sont essentiellement bornées sur K.

Si elles ne sont que localement intégrables, on peut toujours trouver v_1 et v_2, essentiellement bornées sur K, telles que :

(A14) $\int_K |u_i(y)-v_i(y)|dy \leq \eta$, i=1,2, pour η arbitrairement petit.

Grâce à la relation (A11), on peut substituer v_1,v_2 à u_1,u_2 dans (A12), au prix d'une erreur inférieure à :

$$C\int_K\int_K \{|u_1(y_1)-v_1(y_1)| + |u_2(y_2)-v_2(y_2)|\}.r_\varepsilon((y_1-y_2))dy_1\,dy_2$$

(où C est une constante qui ne dépend que de f et F),

qu'on peut majorer par : $2C\eta$, compte tenu de (A14) et du fait que :

$$\int r_\varepsilon(y)dy = \int r_\varepsilon(-y)dy = 1.$$

La majoration étant independante de ε, il ne reste plus qu'à passer à la limite en ε, à la manière de Kružkov.

BIBLIOGRAPHIE

[0] Y.Brenier, Une application de la symétrisation de Steiner aux équations hyperboliques : la méthode de transport et écroulement, à paraître aux C.R.A.S (1981)

[1] Y.Brenier, Calcul des lois de conservation scalaires par la méthode de transport-écroulement, Rapport INRIA, à paraître.

[2] G.Chavent et G.Salzano, A finite element method for the 1-d water flooding problem with gravity, soumis au J. Comp. Phys.

[3] A.J.Chorin, Random choice solution of hyperbolic systems, J. Comp. Phys., 22 (1976), pp.517-533.

[4] M.G.Crandall and A.Majda, Monotone difference approximations for scalar conservation laws, University of Wisconsin (feb.1979).

[5] M.G.Crandall and L.Tartar, Some relations between non expansive and order preserving mappings, à paraître.

[6] W.H.Fleming and R.Rishel, An integral formula for total gradient variation, Arch. Math. 11 (1960), pp.218-222.

[7] J.Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Commun. Pure Appl. Math. 18 (1965), pp.340-343.

[8] S.N.Kružkov, First order quasilinear equations with several space variables, Math. USSR Sb. 10 (1970), pp.217-243.

[9] A.-Y.Leroux, Thèse d'état, Rennes (1979).

[10] O.A.Oleïnik, Discontinuous solution of nonlinear differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. ser 2, 26 (1963), pp.95-172.

[11] A.I.Volpert, The space BV and quasilinear equations, Math. USSR. Sb. 2 (1967), pp.225-267.

[12] A.I.Volpert, Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations, Math. USSR. Sb. 7 (1969) pp.365-387.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

Dépôt légal 310381 / 200